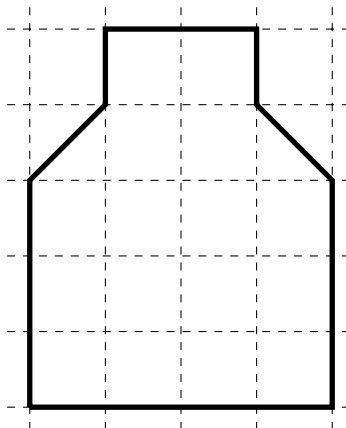
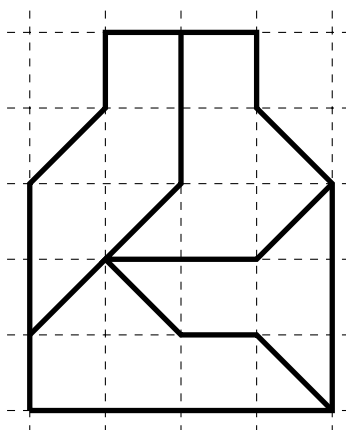


8.1. Разрежьте данную фигуру на четыре попарно различных части так, чтобы у всех этих частей был одинаковый периметр. Напомним, что фигуры считаются различными, если их нельзя совместить наложением.



Решение: Одно из решений выглядит так.



Критерии: Любое верное разрезание – 7 баллов.

8.2. Произведение двух натуральных чисел a и b равно трёхзначному числу, являющемуся кубом некоего натурального числа k . Частное же чисел a и b равно квадрату этого же числа k . Найдите a , b и k .

Решение: Запишем условия в следующем виде $a \cdot b = k^3$, $a/b = k^2$. Разделив первое на второе, получим $b^2 = k$. Так как k^3 – трёхзначное число, то равное ему b^6 – трёхзначное число. Очевидно b не равно 1 и 2, так как $1^6 = 1$, $2^6 = 64$. Далее, b может быть равно 3, так как $3^6 = 729$. И наконец, если $b \geq 4$, то $b^6 \geq 4^6 = 16^3 > 10^3 = 1000$, что тоже не подходит.

Итак, $b = 3$. Отсюда $k = 9$ и $a = 243$.

Критерии: Только ответ или ответ с проверкой – 1 балл.

Схема перебора, если перебор представлен не полностью – не больше 3 баллов.

Во время олимпиады были розданы условия с опечаткой: требовалось найти все целые a и b , что добавляло ещё решение $a = -243$, $b = -3$, $k = 9$. За отсутствие этого случая баллы не снижались.

8.3. Крош, Лосяш и Совунья участвовали в гонках. Крош стартовал первый, но в течение гонки его обгоняли, либо он обгонял других ровно 12 раз. Совунья начала движение последней, однако, в течение гонки её обгоняли, либо она обгоняла других ровно 10 раз. В каком порядке финишировали участники, если известно, что Лосяш закончил гонку раньше Кроша?

Решение: Пронумеруем позиции, на которых находятся смешарики. Сначала у Кроша позиция 1, у Лосяша — 2, у Совунии — 3. При обгоне чётность номера позиции у тех, кто участвует в обгоне, меняется. Значит, у Совунии и Кроша после чётного числа обгонов она не поменялась, и они вдвоём заняли оба нечётных места (первое и третье). То есть, смешарики либо финишировали в том же порядке, либо в обратном. Так как Лосяш закончил гонку раньше Кроша, значит, порядок поменялся. Таким образом, Совунья прибежала первой, Лосяш — вторым, Крош — последним.

Комментарии: Возможно переборное решение, но тогда перебор должен был представлен полностью. Показывать, что ситуация возможна, не обязательно, если доказано, что остальные варианты не подходят.

Критерии: Только ответ — 0 баллов.

Ответ с проверкой — 1 балл.

Схема перебора, если перебор представлен не полностью — не больше 3 баллов.

8.4. На кубической планете живут кубические мыши, причём живут они только на гранях куба, но никак не на рёбрах или вершинах. Известно, что на разных гранях живёт разное количество мышей, причём на любых соседних гранях это количество отличается по крайней мере на 2. Какое минимальное количество кубических мышей может жить на этой планете, если на каждой грани хоть кто-то да живёт?

Решение: Докажем, что никакие три последовательные числа не могут быть количеством мышей на гранях. Действительно, если бы на каких-то трёх гранях жило x , $x + 1$ и $x + 2$ мышей, то x и $x + 1$ должны были бы быть на противоположных гранях. Но тогда $x + 2$ мыши нигде бы быть не могло.

Рассмотрим первые 8 натуральных чисел. Среди первых трёх нет хотя бы одного, среди следующих трёх нет хотя бы одного. Значит, минимальная сумма $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$. Рассадить 27 мышей возможно. Для этого разобьём все грани на пары противоположных. На первой паре будет сидеть 1 и 2 мыши, на второй — 4 и 5, на третьей — 7 и 8. Таким образом, количества, отличающиеся на 1, относятся к противоположным граням, а на соседних разница хотя бы 2.

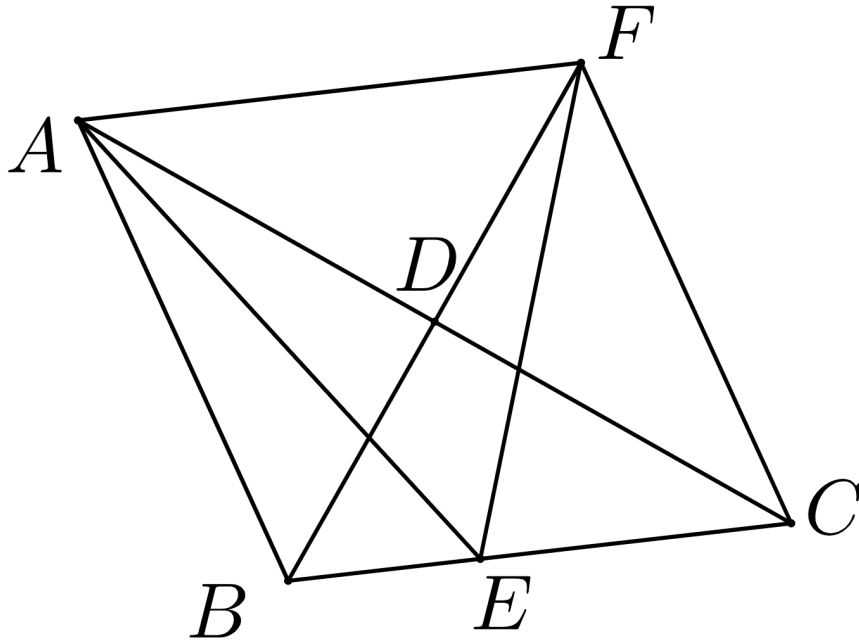
Критерии: Только ответ — 1 балл.

Только пример (с обоснованием или без) — 2 балла.

Только оценка – 5 баллов.

Доказано, что никакие три последовательные числа не могут быть количеством мышей на гранях – 2 балла.

8.5. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, оказалась в два раза короче биссектрисы, проведённой к боковой стороне. Найдите углы этого треугольника.



Решение: Пусть в равнобедренном треугольнике ABC равны стороны $AB = BC$ и выполнены соотношения для биссектрис из условия $AE = 2BD$. Построим ABC до ромба $ABCF$. Тогда, так как BD — биссектриса в равнобедренном треугольнике, это и медиана. Тогда BD — это половина диагонали нашего ромба, так как она попадает в середину другой диагонали AC . Тогда точки B , D и F лежат на одной прямой.

Заметим, что $BF = 2BD = AE$, что означает равенство диагоналей в трапеции $ABEF$. Тогда она равнобокая, т.е. $AB = EF$. В частности, по трём сторонам равны треугольники ABE и FEB , откуда $\angle BAE = \angle BFE$.

Пусть $\angle BAE = \angle EAD = \alpha$. Тогда $\angle FAB = 2\angle BAC = 4\alpha$, $\angle FEB = \angle ABE = 180^\circ - 4\alpha$, $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 90 - 2\alpha$. Значит, в треугольнике FBE из суммы углов получаем

$$180^\circ = \angle BFE + \angle FEB + \angle FBE = \alpha + (180^\circ - 4\alpha) + (90^\circ - 2\alpha) = 270^\circ - 5\alpha,$$

откуда $\alpha = 18^\circ$, а углы исходного треугольника равны 36° , 36° и 108° .

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Идея построить до ромба – 2 балла.